Marche à suivre

Problème de mécanique

Marche à suivre

- Lire (plusieurs fois!) l'énoncé. Noter les éléments/données important(e)s
- « visualiser », analyser le mouvement, avoir une idée du résultat
- Faire un schéma, grand, lisible
    - indiquer les vecteurs accélération, vitesse, les forces externes au système, en faisant attention au point d'application. Ne pas oublier les forces de contraintes telles que réaction d'un support, tension d'un fil,...
- Choisir un référentiel, puis un repère avec un système de coordonnées appropriées
- Dessiner le repère avec les axes sur le schéma en précisant l'origine
- Ecrire la 2nd loi de Newton sous forme vectorielle

$$m\,\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_{ext,i}}$$

Faire la somme des forces: le changement de direction de l'objet considéré (la trajectoire) est selon ce vecteur

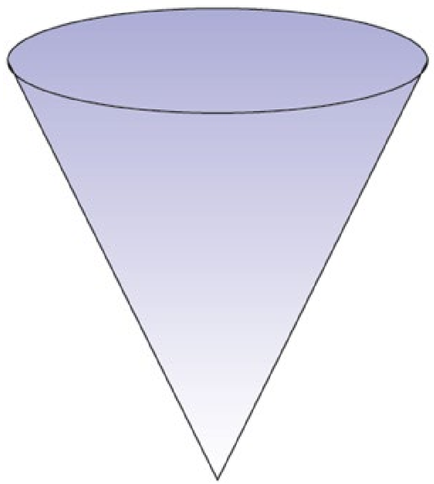
- Exprimer l'accélération sous forme vectorielle, dans le système de coordonnées
- Exprimer les contraintes: exemple un point se déplace sur une sphère ⇨ $r = cte, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$
- Exprimer l'accélération en tenant compte des contraintes
- Projeter la 2nd loi de Newton dans le repère choisi
  - vous pourrez projeter d'abord chaque force et déterminer leurs 3 composantes suivant $\overrightarrow{e_j}$ (exemple $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$)
  - écrire les équations $\mathrm{m}a_j = \sum_i F_{ext,i,j}$ avec a_j l'accélération selon $\overrightarrow{e_j}$ et $F_{ext,i,j}$ la projection de la force $F_{ext,i,j}$ sur $\overrightarrow{e_j}$
- Vous avez alors un jeu de 3 équations (au maximum)

$\Rightarrow$ *Equations différentielles du mouvement*

- Intégrer par rapport au temps pour obtenir la vitesse
- Intégrer une seconde fois pour obtenir les équations horaires du mouvement

Exemple

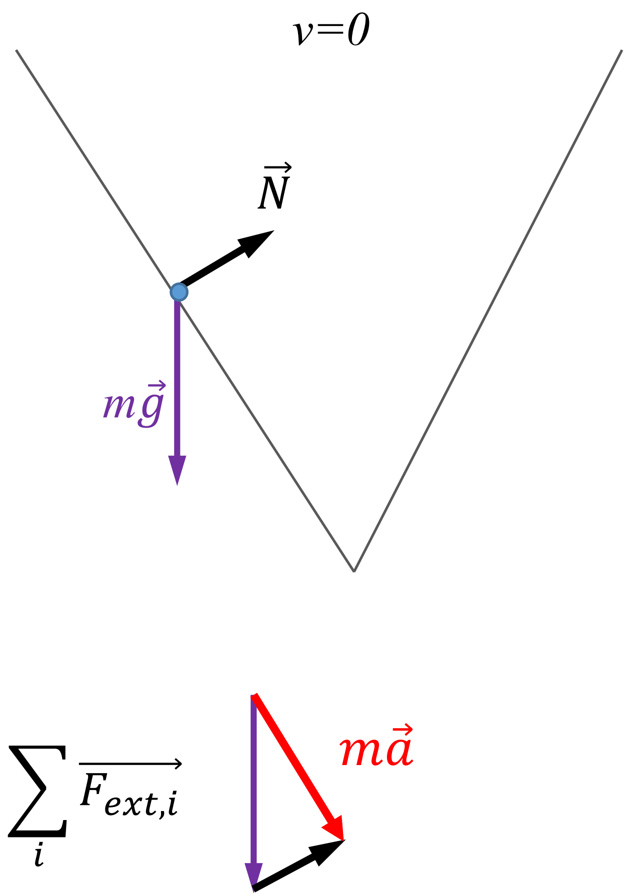
Un motard de masse m, considéré comme un point matériel, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ veut se maintenir en mouvement circulaire uniforme dans un plan à l'intérieur d'une piste en forme de cône d'axe vertical et s'évasant vers le haut. L'angle entre la génératrice du cône et l'axe de révolution est θ. Le rayon de la trajectoire du motard est R. Calculer la vitesse v à laquelle il doit rouler afin de réaliser cette acrobatie sans tomber. (on ne prendra pas en compte les frottements)

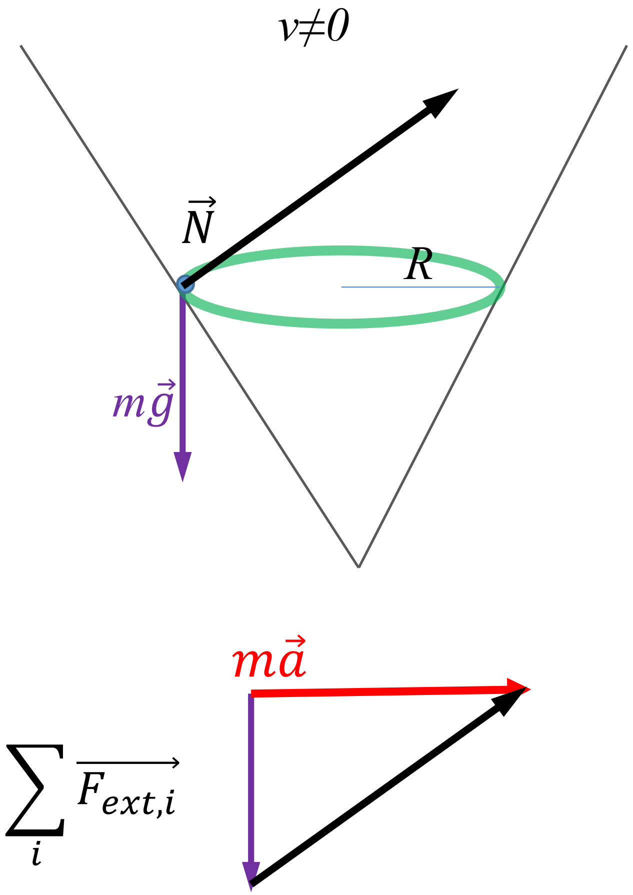


Données connues:

- la masse m
- la forme du cône θ
- La trajectoire du motard : circulaire uniforme (v =cte) dans un plan
- pas de force de frottement

1. Analyse du mouvement





Mouvement circulaire dans un plan (le motard ne tombe pas)

⇨ l'accélération est dans le plan

⇨ $a = \frac{v^2}{R}$

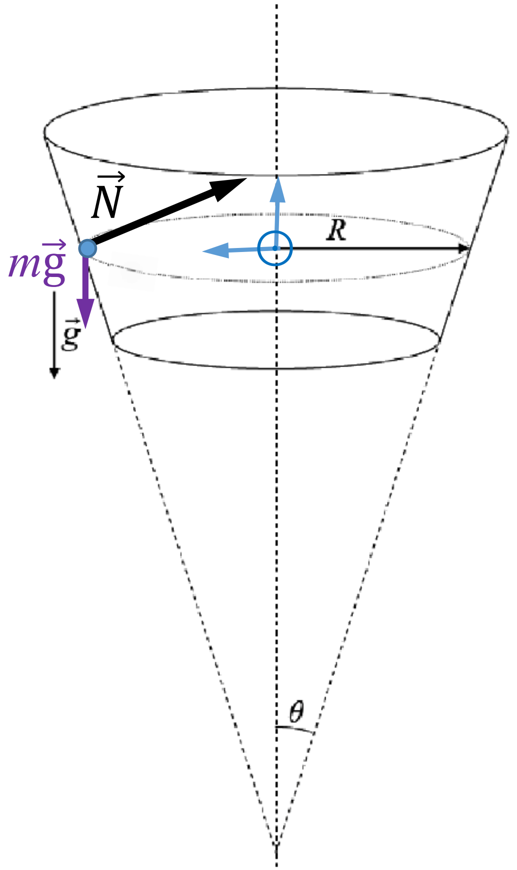
La réaction N du support augmente

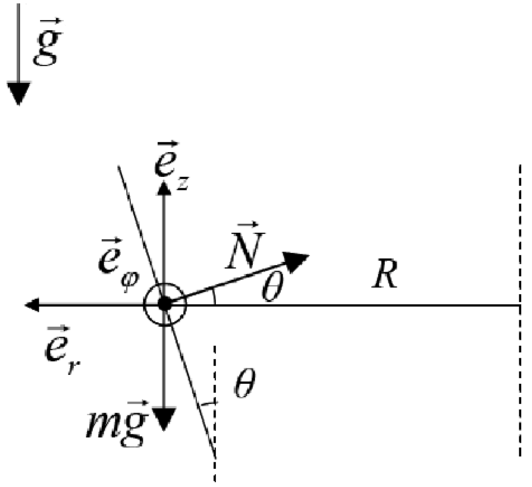
2. Schéma

3. Référentiel: la Terre considérée ici comme un référentiel galiléen (ne tourne pas)

4. On choisit les coordonnées cylindriques (mouvement circulaire dans un plan repéré par z)

5. Dessin du repère avec l'origine sur l'axe du repère et dans le plan de la rotation du motard

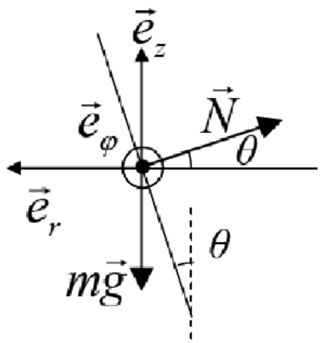




6. 2nd loi de Newton sous forme vectorielle

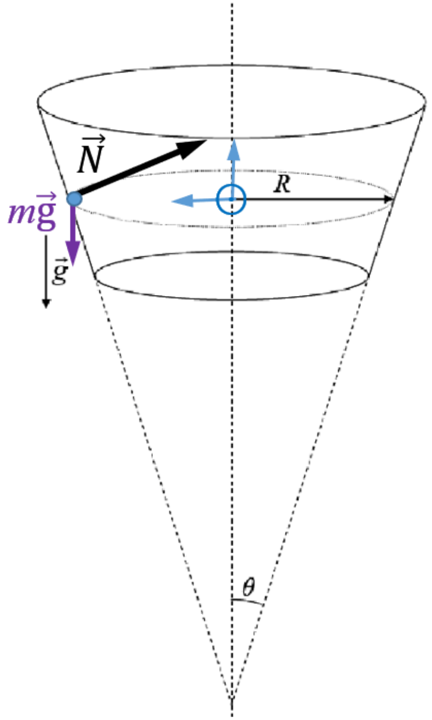
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Forces extérieures



7. Accélération en coordonnées cylindriques

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$



8. Contraintes: mouvement circulaire uniforme dans un plan implique

$r = cte,\ \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$ circulaire

$z = cte,\ \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$ dans un plan

$v = cte \Rightarrow \omega = cte = \dot{\varphi}, \ddot{\varphi} = 0$ vitesse constante

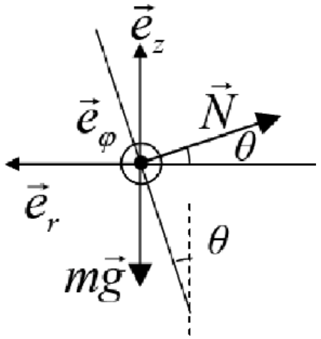
9. Accélération avec contraintes

$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

avec $r = R$

10. Projection de la 2^{nd} loi de Newton dans le repère choisi

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$



projection $(\overrightarrow{Force}.\vec{e}_j)$

sur $\vec{e}_r$ $\quad m\,(-R\,\dot{\varphi}^2) = 0 \ - \ N\cos\theta \qquad (1)$

sur $\vec{e}_\varphi$ $\quad 0 = 0 \ + \ 0 \qquad (2)$

sur $\vec{e}_z$ $\quad 0 = -mg \ + \ N\sin\theta \qquad (3)$

11. Calcul de la vitesse

de l'équation (3), on déduit $N = \dfrac{mg}{\sin\theta}$

en injectant ce résultat dans l'équation (1), on trouve $\dot{\varphi} = \omega = \sqrt{\dfrac{N\cos\theta}{mR}} = \sqrt{\dfrac{g}{R\tan\theta}}$

Le mouvement est circulaire uniforme de rayon R: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R}$ *avec* $r = R$ *et* $\vec{\omega}\perp\vec{R}$ *soit* $v = R\omega$

Finalement, la vitesse recherchée est $v = \sqrt{\dfrac{gR}{\tan\theta}}$